

Introducción al Álgebra (11-1)

Pauta Control Recuperativo.

P1 (a) Demuestre usando inducción que, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{6}$$

Es útil escribir $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$

Inducción sobre n i) Para $n=1$ $\sum_{k=1}^2 \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq \frac{5}{6} \Leftrightarrow V$

ii) H.I. Sea $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$ algún $n \in \mathbb{N}$. (0.5)

iii) Por dem. que: $\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+1+k} \leq \frac{5}{6}$

En efecto $\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k=2}^{n+3} \frac{1}{n+k}$ (por cambio de índices. (0.5))

y $\sum_{k=2}^{n+3} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3}$ (1.0)

$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k}}_{\text{H.I.}} \leq \frac{5}{6}$

(1.0) \rightarrow

(b) Los n naturales consecutivos (número) a partir de k_0 están entre k_0 y k_0+n-1 , así su suma será:

$$\sum_{i=k_0}^{k_0+n-1} i = \sum_{i=1}^{k_0+n-1} i - \sum_{i=1}^{k_0-1} i = \frac{(k_0+n-1)(k_0+n)}{2} - \frac{(k_0-1)k_0}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Sumas} \\ \text{conocidas} \end{array} \right)$$

(1.0) \rightarrow $= \frac{k_0^2 + k_0 n - k_0 + k_0 n + n^2 - n - k_0^2 + k_0}{2} = \frac{2k_0 n + n^2 - n}{2} = n \left(\frac{2k_0 + n - 1}{2} \right)$

(2.0) Como n es impar, $n-1$ es par $\Rightarrow 2k_0 + n - 1$ es par $\Rightarrow \frac{2k_0 + n - 1}{2} \in \mathbb{N}$
 Sigue que la suma es divisible por n ($= n \cdot p, p \in \mathbb{N}$)

P2 R en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ se define por $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow xt = zy$

i) Dem. que R es relación de equivalencia y describir clases $[0, 1]$ y $[3, 3]$

1) R es reflexiva mi $\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}, (x, y) R (x, y)$

0.2 \rightarrow En efecto $(x, y) R (x, y) \Leftrightarrow xt = zy \Leftrightarrow V$

0.3 \rightarrow 2) Simetría $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow xt = zy \Leftrightarrow zy = xt \Leftrightarrow (z, t) R (x, y)$

3) Transitividad: Sean $(x, y) R (z, t) \wedge (z, t) R (u, v)$

$$\Leftrightarrow xt = zy \wedge zv = tu \Rightarrow x \cancel{t} / \cancel{z} v = \cancel{z} \cancel{t} / \cancel{u} t$$

1.0 $\rightarrow \Rightarrow xv = ut \Rightarrow (x, y) R (u, v)$

$$[0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / (x, y) R (0, 1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / x \cdot 1 = 0 \cdot y = 0\}$$

0.5 $\rightarrow = \{(0, y) / y \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$

$$[3, 3] = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / (x, y) R (3, 3)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / 3x = 3y\}$$

0.5 $\rightarrow = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / x = y\}$

ii) Sea $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$; $f(x, y) = \frac{x}{y}$

Demostar que $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow f(x, y) = f(z, t)$

1.5 \rightarrow En efecto, $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow xt = zy \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{t} \ (y, t \neq 0) \Leftrightarrow f(x, y) = f(z, t)$

iii) Demuestra que la función $F: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / R \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $F([x, y]) = f(x, y)$ es biyectiva.

En efecto: F es inyectiva pues: $F([x, y]) = F([z, t]) \Rightarrow f(x, y) = f(z, t)$ (por ii)

1.0 $\rightarrow \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{t} \Rightarrow xt = zy \xRightarrow{\text{Def } R} (x, y) R (z, t) \xRightarrow{\text{Propiedad}} [x, y] = [z, t]$

0.5 $\rightarrow F$ es sobreyectiva pues $\forall q \in \mathbb{Q}, q = \frac{x}{y}$ con $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$, existe $[(x, y)] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / R$ tal que $F([(x, y)]) = f(x, y) = \frac{x}{y} = q$.

0.5 iv) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / R$ es numerable pues F es biyectiva y \mathbb{Q} es numerable